核をもつ準群について

On semigroup having a kernel

江　口　俊　男

緒　　言

前回に引続いて準群に関する新しい定理を導く。中心となるのは SCHWARZ のイデヤルである。目的とする所は、核をもつた準群の単純イデヤルを研究し、Suschkewitsch、Rees、Clifford 等によりて見出された結果を一般化することである。

勿論、こゝで得られた結果のいくつかは Rees によつて導入された "difference-semigroup" の概念を使つた Clifford の結果 (4) からも導かれるが、この方が直接的で、簡明である。

1. 単純イデヤル

先づ、核をもつ準群に関する定義と結果を準備としてのべる。

S を核をもつ準群、核をNとする。積 NS は又 N に含まれる S の一つの両面イデヤルである。NS＝N、同様に NS＝N。

S' を S の部分集合とする。N の任意の元 n に対して、$S'\subseteqq NS'\subseteqq NS=N$、即ち $nS'\subseteqq N$、同様に $S'n\subseteqq N$。

特に、S の各元 x に対して $xN\subseteqq N$、$Nx\subseteqq N$。

集合 N 及び N の各元 n は常に零元と同様の性質をもつ。

S＝N であるような準群が存在する。斯様な準群は S と異る両面イデヤルを有たない。その一例は $S=\{e_1、e_2、e_3、\}$……、

$e_i e_k=e_k$、ik＝1、2、3、……。

かゝる準群は考えないで、唯 $N\subset S$ なる準群のみを研究する。

順序として、最小（右、左、両面）イデヤルの考へを明らかにする。そして新しく単純右（左、両面）イデヤルの概念を導き、且それ等の基本的性質を若干証明しよう。

定義 1、1

S を核 N を有つ準群とする。S の左イデアル L は、$N\subset L\subseteqq S$ で、他に $N\subset L'\subseteqq S$ なる L' が存在しない時、S の単純左イデヤルと呼ぶ

定理　1、1

S を核 N をもつ準群とする。S の異る二つの単純左イデヤルの交りは、N に等しい。

証　明

S の異る二つの左イデヤルを L_1、L_2とする。$N\subseteqq L_1\cap L_2\subseteqq L_1$、$N\subseteqq L_1\cap L_2\subseteqq L_2$、又交り $L_1\cap$

L_2 は S の左イデヤルである。若しそれが N 以外の任意の元を含むとすれば、L_1、L_2 の単純性の故に、$L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$、之は仮定に反する。

定理 1、2

核 N を有つ準群 S のすべての単純左イデヤル L に対して、次の関係が成り立つ。

$$LN = NL = N$$

証　明

a) LN は N に含まれる S の両面イデヤルである。故に N に等しい。

b) N は S の両面イデヤルであるから、$NL \subseteqq NS \subseteqq N$。他方 $NL \supseteqq NN = N^2 = N$。故に $NL = N$。

定理 1、3

S を核 N をもつ準群、L_1、L_2 を S の単純左イデアルとする。$L_1L_2 = N$、か或は $L_1L_2 = L_2$。

証　明

L_1L_2 は L_2 に含まれる S の左イデヤルである。

$N \subset L_1$、$N \subset L_2$ であるから $N^2 = N \subseteqq L_1L_2$

故に $L_1L_2 \subseteqq L_2$。L_2 の単純性の故に $L_1L_2 = L_2$、或は $L_1L_2 = N$

系 1、3

すべての単純左イデヤル L に対して

$$L_2 = L、或は\ L_2 = N$$

定　理 1、4

L を核 N をもつ準群 S の単純左イデヤルとする。c を S の任意の元とすると、集合 N+Lc は、S の最小左イデヤルか、或は N に等しい

証　明

$Lc \subseteqq N$、か少くとも、N に含まれない元 $a \in Lc$。

始めの場合に於ては定理は明らかである。後の場合に於ては、N+Lc は単純左イデヤルであることを証明する。

L^* が S の左部分イデヤルであると仮定する。

$N \subset L^* \subset N + Lc$。$L_1$ を $ac \in L^*$ なるすべての元 $a \in L$ の集合とせよ。若し $s \in S$、ならば、$sac \in sL^* \subset L^*$、故に $sa \in L_1$。故に L_1 は L に含まれる S の左イデヤルである。

L は単純であるから $L_1 = L$、或は $L_1 \subseteqq N$。$L^* = N + L_1c \subseteqq N + Nc \supset N$。これは $N \subset L^*$ と矛盾する。

定　理 1、5．

核 N をもつ準群 S のすべての単純左イデヤルの和が空でないならば、それは S の両面イデヤルである。

証　明

$M=\sum_{\alpha} L\alpha$ を S のすべての単純左イデヤルの階和とする。Mは明らかに左イデヤルである。それは又右イデヤルでもあるということを証明する。s を S の任意の元とする。$Ms=\sum_{\alpha}(L\alpha s)$ すべての $L\alpha s$は集合 $N+L\alpha s$ に含まれる。而もすでに M に含まれる。故に $Ms\subseteqq M$。

定　義 1、2

S を核 N をもつ準群とする。S の両面イデヤル M は、若し $N\subset M\subseteqq S$ で且つ、次の関係を満足する他の両面イデヤル M' が存在しない時単純であるという。$N\subset M'\subset M\subseteqq S'$。

定　理 1、6

S が核 N をもつとす。任意の二つの単純両面イデヤル M_1、M_2 に対して、常に、

$$M_1M_2=M_1\cap M_2=N$$

証　明

明らかに、$N\subseteqq M_1M_2\subseteqq M_1$、$N\subseteqq M_1M_2\subseteqq M_2$。

故に $N\subseteqq M_1M_2\subseteqq M_1\cap M_2$。然し定理 1、1 に於て、$M_1\cap M_2=N$。故に $N=M_1M_2=M_1\cap M_2$。

若し、$M_1=M_2$ ならば、唯関係 $N\subseteqq M_2\subseteqq M$ をうるのみ。

系 1、6

すべての単純両面イデヤル M に対して、$M_2=M$ か $M_2=N$。

2、単純左（右、両面）イデヤルの階和

次に核をもつ準群が、その単純左（右、両面）イデヤルの和として表わされる条件について調べる。

定　理 2、1

若しSがその左（右、両面）イデヤルの和であるならば、その分解は一意的に決定される。

証　明

両面イデヤルについて証明する。

$$S=\sum_{\lambda} M\lambda \quad (1)$$

$$S=\sum_{N} M_N \quad (2)$$

$M\lambda$、M_Nは S の単純両面イデヤル。

各 $M\lambda$ が (2) の和に含まれ、各 M_N が (1) の和に含まれることをいえば十分である。

$M'\alpha$ を (2) の右側の和とする。

$$S\cap M'\alpha \qquad (\sum M\lambda)\cap M'\alpha$$

$$M'\alpha=\sum M\lambda\cap(M\lambda\subset M'\alpha) \qquad (3)$$

$M\lambda\cap M'\alpha$ は N か、或は $M\lambda\cap M'\alpha=M\lambda=M'\alpha'$ である。(3) の左側に於て、イデヤル $M'\alpha$は $\supset N$ だから第二は少くとも一つの λ に対して生じなければならない。故に少くとも一つの λ に対して $M'\alpha=M\lambda$。

同様に和 (1) に属する $M\beta$ がイデヤル $M'x$ の和に等しいことを知る。

定　理 2、2

S を核 N をもつ準群とする。S は次の条件が満足される時、而もその時に限り、単純左イデヤルの階和である。

$a=xb$、　a、b、non$\in N$に対して

${}^{-1}xa=b$　${}^{-1}x$　non$\in N$

証　明

1、必要なること。

仮定により各元 $a\in S-N$ は或る単純左イデヤルに含まれる。このイデヤルは必然$La=(Na, Sa)$、$b\neq a$、$b\in S-N$。

集合 $Lb=(Nb, Sb)$ は再び S の単純左イデヤルである。定理 1、1 により $(Na, Sa)\cap(Nb, Sb)=N$、か或は、$(Na, Sa)=(Nb, Sb)$。

$a\neq b$、$a\in S-N$、$b\in S$。関係 $a\in Sb$、$b\in Sa$ は同時に満足される。即ち $x\in S$、$a=xb$ ならば、又${}^{-1}x\in S$、$b={}^{-1}xa$。

更に${}^{-1}x\in S-N$。${}^{-1}x\in N$

故に $b={}^{-1}xa\in Na\subseteqq N$。之は仮定に反す。

2、十分なること。

若し S が条件を満足すれば、任意の元 $a\in S-N$ は S の或る単純左イデヤルに含まれる。

$a\in S-N$ とイデヤル $La=(Na, Sa)$ を考える。$N\subset L\subset La$ なる左イデヤル L は存在しない。即ち La は S の単純左イデヤルである。間接的にそれを証明する。L を斯様なイデヤル b を L の任意の元、$b\in L-N$、$b\neq a$。その時 $Lb=(N, b, Sb)$ は明らかに次式を満足する。

$$N\subset Lb\subseteqq L\subset La \quad (4)$$

$b\in La$、　b、non$\in N$、$b\neq a$ 故に $b=xa$、　$x\in S-N$。仮定によりこの関係は、$a={}^{-1}xb$、${}^{-1}x$、non$\in N$ を含む。

故に $a\in Sb$ かつ、

$$a\in(N, b, Sb)$$
$$Sa\subseteqq(N, Sb, S^2b)=(N, Sb)$$
$$(N, a, Sa)\subseteqq(N, b, Sb)$$
$$La\subseteqq Lb$$

故に$L=La=Lb$。

この定理の右の相対として次の定理をうる。

定　理 2、3

S を核 N をもつ準群とする。S は次の条件を満足するとき、而も、その時に限り、単純左

イデヤルの階和である。

$$a=by, \quad a, b\in S-N$$

に対して

$$b=a^{-1}y \quad a^{-1}\in S-N$$

定　義 2、1

S が単純両面イデヤルの階和として表わされるとき、S は両面イデヤルの直和であるという。

定　理 2、4

S を核 N を有つ準群とする。S は次の関係を満足する時に限り、両面イデヤルの直和である。

$$a=bx_1 \text{ 或は } a=x_2b \text{ 或は } a=x_3bx_4 \qquad (5)$$

この時 b は少くとも次の形式の何れかである。

$$b=a\bar{x}_1, \quad b=\bar{x}_2a, \quad b=a\bar{x}_3\bar{x}_4 \qquad (6)$$

証　明

1、必要なること。

S が単純両面イデヤルの階和であるとする。

任意の元 $a\in S-N$ は単純両面イデヤル Ma に含まれる。若し a が Ma に属するならば、aS、Sa、SaS、も然り。Ma=(Na、Sa、aS、SaS)=(a、Sa、aS、SaS)、

$b\neq a$ を S—N の他の元とする。b が属する単純イデヤルは必然 Mb=(b、Sb、bS、SbS) である。

$$Ma\cap Mb=N \text{、か } Ma=Mb \text{ か何れかである。後の方は}$$

$$(a, Sa, aS, SaS)=(b, Sb, bS, SbS)\text{。}$$

が少くとも $a\in Sb$、$a\in bS$、$a\in SbS$ の何れかの一つを含むことを示す。即ち少くとも関係 $a=bx_1$、$a=x_2b$、$a=x_3bx_4$ の一つの存在を示す。然し b は少くとも集合 Sa、aS、SaS の一つに含まれる。即ち少くとも $b=a\bar{x}_1$、$b=\bar{x}_2a$、$b=\bar{x}_3a\bar{x}_4$ の一つが存在する。

2、十分なること

$a\in S-N$。a の属する両面イデヤルを Ma (a、Sa、aS、SaS)。

Ma は単純である。何故なら、今 $N\subset M\subset Ma$ なる S の両面イデヤル M が存在するとする。

$b\in M-N$、$b\neq a$。その時 Mb=(b、Sb、bS、SbS) は明らかに M に含まれる S の両面イデヤルである。故に

$$N\subset Mb\subseteq M\subset Ma \qquad (7)$$

今 $b\in Ma$ とすると

$b \in Sa$、$ba \in S$、$b \in SaS$、

の一つが成立する。仮定により関係 $a \in Sb$、$a \in bS$、$a \in SbS$ の何れかが成立する、

a) $a \in Sb$ とする。

$aS \subseteqq SbS$、$Sa \subseteqq S^2b \subseteqq Sb$、$SbS \subseteqq SbS$。

故に $Ma=(a, Sa, aS, SaS) \subseteqq Sb, SbS) \subseteqq (b, bS, Sb, SbS)=Mb$

(7) により仮定に反す

b) $a \in bS$ とする。

同様に $Ma \subseteqq Mb$ 矛盾を含む

c) $a \in SbS$ とする。

$aS \subseteqq SbS$、$Sa \subseteqq SbS$、$SaS \subseteqq SbS$

故に $Ma \subseteqq (b, SbS) \subseteqq Mb$、之も矛盾

故にイデヤル Ma は S の単純両面イデヤルである。

定理 2、2—2、4 の系を導くために次の定義を導入する。

定 義 2、2

S を核 N をもつ準群とする。$Sa \subseteqq N$ なるすべての元 $a \in S$ のすべて Nr を S の右減と呼び、$aS \subseteqq N$ なる元 $a \in S$ のすべて N_1 を左減と呼ぶ

以下Nr、N_1 の性質を証明する。

定 理 2、5

a) $N \subseteqq N_1$、$N \subseteqq Nr$

b) N_1、Nr は S の両面イデヤルである。

c) $SNr=N$、$N_1S=N$。

d) $N_1^2=N$、$Nr^2=N$

e) $N_1Nr=N$

証　明

a) $SN=NS=N$ 故に明らかに

$N \subseteqq Nr$、$N \subseteqq N_1$、

b) $a \in N_1$、$s \in S$ この時 $(sa)S=s(aS) \subseteqq s$、$N \subseteqq N$。故に $sa \in N_1$、$sN_1 \subseteqq N_1$ 集合 N_1 は S の左イデヤルである。他方 $(as)S=a(sS) \subseteqq aS \subseteqq N$。故に $as \subseteqq N_1S \subseteqq N_1$ 故に N_1 は右イデヤルである。故に両面イデヤルである。同様にNrも両面イデヤルである。

c) 定義により $N_1S \subseteqq N$、然して

b) により N_1S は S の両面イデヤルである。故に $N_1S=N$。同様に SNr N

b) Nr^2 は S の両面イデヤルであるから

$N_1^2 \subseteqq NN_1S=N$

故に $N_r^2=N$、同様に$N_l^2=N$

e) N_l、N_rは明らかに S の両面イデヤルである。それは $N_lS=N$ に含まれる。故に N に等しい

系 2、2

S を核 N をもつ準群、又その単純左イデヤルの階和とする。然らば各元 $a\in S-N_r$ に対して $a=\epsilon a$ なる $\epsilon\in S-N_l$ が存在する。

系 2, 3

核 N をもつ準群 S がその単純右イデヤルの階和であるならば、任意の元 $a\in S-N_l$ に対して $a=af$ なる $f\in S-N_r$が存在する。

定　義 2、3

$SaS=N$ を満足するすべての元 $a\in S$ の集合は N_0 として書かれる

定　理 2、6

N_0 について

a) N_0 は S の両面イデヤルである。

b) $N_0^2\subseteqq N_r$、　$N_0^2\subseteqq N_l$、

c) $N_0^3=N$

証　　明

a) 定理 2、5 より明らか。

b) $N=SN_0S\in N_0^2S$。

NS は S の両面イデヤルだから $N=N_0^2S$。故に$N_0^2\subseteqq N_l$　同様に$N_0^2\subseteqq N_r$。

c) $N=SN_0S\subseteqq N_0N_0N_0=N_0^3$

N_0^3 は S の両面イデヤルだから $N_0^3=N$。

系 2、4

核 N をもつ準群 S が両面イデヤルの直和であるとする。任意の元 $a\in S-N_0$ に対して$a=\epsilon af$ なる二つの元 $\epsilon\in S-N_l$、$f\in S-N_r$

結　　語

単純イデヤルの存在を確めるために、結局次の二つの条件の一つを時々準群に設けねばならない。

条　件 A

核 S をもつ準群 S は少くとも一つの単純左イデヤル、少くとも一つの単純右イデヤルをもつ。

そしてこの条件の一つを満足する準群の種々の型について、一体如何なることが更にいわれるかということが次の目標になつてくる。そのために引続き、N—potency の概念や条件を満

足する準群、更に他の条件 B を満足する準群、単純左イデヤルの構造等について言及しなければならない。

参 考 文 献

Clifford, A, H

〔1〕 A system arising from a weaKened set of group Postulates, Ann, of Math, 34 (1933), 865—871,—

〔2〕 Semigroups admitting relative inverses, Ann of Math, 42 (1941), 1037—1049.

〔3〕 Semigroups containing minimal ideals, Amer, J. Math, 70 (1948), 521—526.

〔4〕 Semigroups without nilpotent ideals, Amer, J. Math 71 (1949), 834—844.

〔5〕 Extensions of semigroubs, Trans, Amer, Math, Soc, 68 (1950), 195—173.

〔6〕 Matrix representation of completely simple semigroups, Amer, J. Math 64 (1942) 237—342.